יחידה 6
איזומטריות

6.1 מבוא גיאומטרי

בסעיף זה נגדיר את המונחים הגיאומטריים שלהם נזדקק בהמשך, נפרט את הסימונים שבהם נשתמש, ונציג את הטענות הבסיסיות של הגיאומטריה האוקלידית, הרלוונטיות לענייננו.

6.1.1 ישרים, קרניים, קטעים

המישור (כלומר קבוצת הנקודות שבו) יסומן $\mathcal{P}$. את $\mathcal{P}$ נוכל לדמיין לעצמנו כמשטח אופקי (בדומה לשולחן) שהוא אינסופי באורכו וברוחבו.

נקודות המישור תסומנה באותיות לטיניות גדולות ונטויות – $A,B,P,Q,X,Y,\ldots$

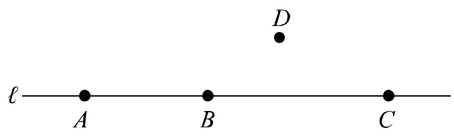
ישרים במישור יסומנו באותיות כתב לטיניות – $\ell,m,n,\ldots$

$P\in\ell$ משמעו "הנקודה P **נמצאת על הישר** ℓ". במילים אחרות – "הישר ℓ **עובר דרך** P."

- לכל זוג נקודות שונות יש **ישר אחד ויחיד** שעובר דרכן.

נקודות שונות שנמצאות על ישר אחד מכונות **נקודות קוויות**.

כל שתי נקודות שונות הן קוויות (שתיהן נמצאות על הישר שעובר דרכן); שלוש נקודות שונות (או יותר) אינן בהכרח קוויות. הנקודות A,B,C מאיור 1 הן קוויות (שלושתן על הישר ℓ); הנקודות A,B,D אינן קוויות (הישר היחיד העובר דרך A ו־ B הוא ℓ, והנקודה D אינה עליו).



איור 1

- אחת ורק אחת מכל שלוש נקודות שונות שהן קוויות **נמצאת בין** השתיים האחרות.

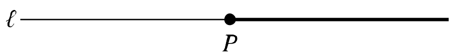
באמירה שנקודה כלשהי נמצאת בין שתי נקודות קוויות, כוונתנו לכך שמדובר בשלוש נקודות קוויות **שונות** ביניהן.

- לכל $A \neq B$ יש נקודה שנמצאת ביניהן.
- אם C בין A ו־ B, אז כל נקודה שנמצאת בין A ו־ C או בין C ו־ B, נמצאת בין A ו־ B.

X בין A ו־ C, לכן היא בין A ו־ B Y בין C ו־ B, לכן היא בין A ו־ B

איור 2

יהי ℓ ישר ותהי P נקודה עליו ($P \in \ell$). הנקודה P מפרידה את נקודות הישר ℓ לשתי קבוצות; כל קבוצת נקודות היא **קרן של** ℓ **שיוצאת מ־** P.

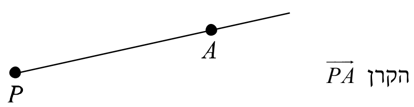


קרן של ℓ שיוצאת מ־ P

איור 3

שתי נקודות של ℓ, ששונות מ־ P, הן על אותה קרן של ℓ שיוצאת מ־ P, אם P **אינה** ביניהן; אחרת (כלומר אם P ביניהן) – הנקודות הן **על קרניים נגדיות** של ℓ שיוצאות מ־ P. הנקודה P עצמה נמצאת על כל קרן שיוצאת מ־ P, של כל ישר שעובר דרך P.

לכל $A \neq P$ יש קרן יחידה שיוצאת מ־ P, המכילה את A. הקרן הזאת תסומן: $\overrightarrow{PA}$



איור 4

הקרן $\overrightarrow{PA}$ **מונחת על הישר** העובר דרך הנקודות P,A, כלומר היא מוכלת בו. $\overrightarrow{PA}$ היא אפוא אחת משתי הקרניים הנגדיות היוצאות מ־ P, של הישר ℓ העובר דרך P,A.

אם $B \in \overrightarrow{PA}$, אז: $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA}$

אם $B \notin \overrightarrow{PA}$ אז ל־ $\overrightarrow{PA}$ ול־ $\overrightarrow{PB}$ אין נקודות משותפות מלבד P. במקרה זה:

אם A,P,B הן קוויות, אז $\overrightarrow{PB}$ היא הקרן הנגדית ל־ $\overrightarrow{PA}$ (ראו בצד ימין של איור 5);

אם A,P,B אינן קוויות, אז הקרניים $\overrightarrow{PA}$ ו־ $\overrightarrow{PB}$ מונחות על ישרים שונים **שנחתכים** ב־ P (ראו בצד שמאל של איור 5).

A,P,B קוויות; $B \notin \overrightarrow{PA}$; $\overrightarrow{PB}$ היא הקרן הנגדית ל־ $\overrightarrow{PA}$

A,P,B לא קוויות; $\overrightarrow{PA}$ ו־ $\overrightarrow{PB}$ מונחות על ישרים שונים

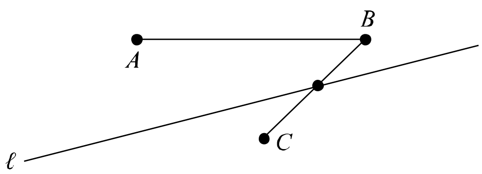
איור 5

הקטע שקצותיו A ו־ B (או הקטע **המחבר את** A ו־ B) הוא קבוצת הנקודות שנמצאות בין A ל־ B, בתוספת **נקודות הקצה** A ו־ B עצמן. הקטע הזה יסומן:

AB או BA

אם $A = B$ אז בין A ל־ B אין אף נקודה. במקרה זה AB הוא **קטע מנוון**, המכיל נקודה אחת בלבד. אם $A \neq B$ אז הקטע AB הוא קבוצה אינסופית. במקרה זה הקטע AB מונח על הישר העובר דרך A ו־ B.

יהי ℓ ישר. ℓ מפריד את נקודות המישור לשני צדדים המכונים **חצאי מישור**. שתי נקודות שונות, שאינן על ℓ, הן **באותו צד** של ℓ אם הקטע שמחבר אותן זר ל־ ℓ. אם הקטע שמחבר את שתי הנקודות פוגש את ℓ, אז הנקודות הן **בצדדים שונים** של ℓ. באיור 6, הנקודות A ו־ B הן באותו צד של ℓ, ואילו A ו־ C הן בצדדים שונים של ℓ. הנקודות של ℓ עצמו נחשבות כשייכות לשני הצדדים של ℓ.



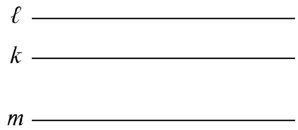
איור 6

ישרים שאין להם נקודה משותפת הם **ישרים מקבילים**.

כדי לציין ש־ ℓ ו־ m מקבילים נשתמש בסימון: $\ell \parallel m$

- דרך כל נקודה שאינה על ℓ עובר ישר יחיד שמקביל ל־ ℓ.

- אם כל אחד משני ישרים שונים ℓ,m מקביל לישר שלישי k, אז ℓ ו־m מקבילים זה לזה.



$\ell \parallel k$ ו־ $m \parallel k$, לכן $\ell \parallel m$

איור 7

- שני ישרים שונים שאינם מקבילים **נחתכים בנקודה אחת**.

6.1.2 זוויות

הגדרה

זווית היא צורה במישור הנוצרת על־ידי שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת.
הקרניים ($\overrightarrow{OA}$ ו־ $\overrightarrow{OB}$) הן ה**שוקיים** של הזווית, ונקודת המוצא המשותפת (O) היא ה**קדקוד** של הזווית.

אם שתי קרניים $\overrightarrow{OA}$ ו־ $\overrightarrow{OB}$, שיוצאות מנקודה אחת קובעות שתי **זוויות** שסכום מידותיהן $360°$ (מעלות), אז:

אם $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ אז אחת משתי הזוויות היא בת $0°$ והאחרת בת $360°$ (איור 8א).

אם $\overrightarrow{OA}$ ו־ $\overrightarrow{OB}$ הן קרניים נגדיות של ישר אחד, אז כל אחת משתי הזוויות היא בת $180°$.

זווית בת $180°$ נקראת **זווית שטוחה** (איור 8ב).

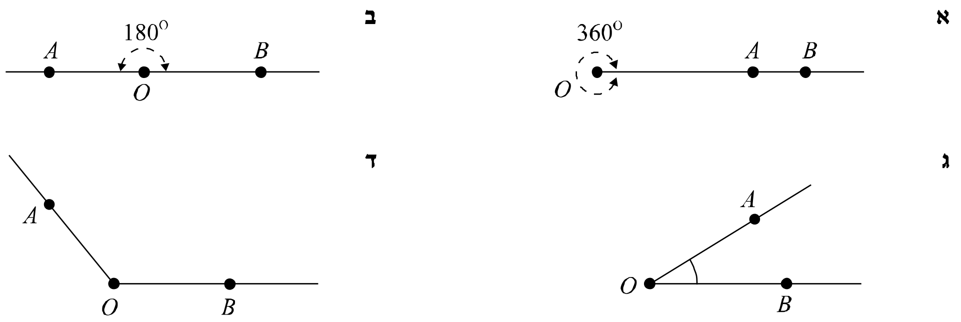
אם $\overrightarrow{OA}$ ו־ $\overrightarrow{OB}$ אינן מתלכדות ואינן נגדיות, אז המידה של אחת (בלבד) משתי הזוויות קטנה מ־ $180°$, וזו הזווית שאליה נתכוון כאשר נדבר על **הזווית הכלואה בין** $\overrightarrow{OA}$ ו־ $\overrightarrow{OB}$ (איור 8ג,ד).

סימון: $\sphericalangle AOB$ או $\sphericalangle BOA$

(בשני הסימונים, האות האמצעית היא הקדקוד.)

לעיתים, כאשר אין חשש לבלבול, נקצר בכתיבה ונסתפק בציון הקדקוד בלבד; למשל, במקום $\sphericalangle AOB$ נכתוב $\sphericalangle O$.

לפעמים נסמן זוויות באותיות יווניות, כגון $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

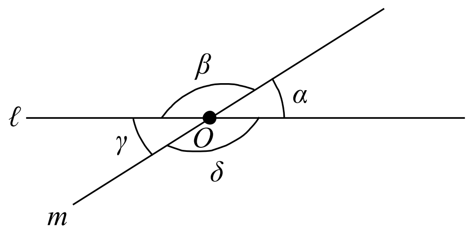


איור 8

כמקובל בספרי גיאומטריה, לא נקפיד להבחין, לא מילולית ולא באמצעות סימון מתאים, בין זווית לבין מידתה. למשל, לציון העובדה ש**מידת** הזווית α מאיור 8ג היא 30° נרשום פשוט $\alpha = 30^{\circ}$; כיוצא בזה, נרשום $\sphericalangle AOB = 140^{\circ}$ במקום להאריך בדיבור ולומר ש**מידת** הזווית הכלואה בין $\overrightarrow{OA}$ ל־ $\overrightarrow{OB}$ באיור 8ד היא 140°. באופן דומה, שוויונות מעין $\alpha = \beta$ או $\sphericalangle X = \sphericalangle Y$ יציינו שהזוויות שמשני צדי סימן השוויון הן **שוות מידה** (גם כאשר שוקיהן אינן מתלכדות, כלומר כשהן אינן אותה זווית).

שני ישרים $\ell \neq m$ שונים שנחתכים בנקודה O כולאים ביניהם ארבע **זוויות**, אשר O הוא הקדקוד (המשותף) שלהן. שוק אחת של כל זווית היא קרן (שיוצאת מ־ O) המונחת על ℓ, והשוק האחרת היא קרן (שיוצאת מ־ O) המונחת על m. הזוויות הכלואות בין ℓ ל־ m מאיור 9 סומנו $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

בבירור, $0^{\circ} < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 180^{\circ}$



איור 9

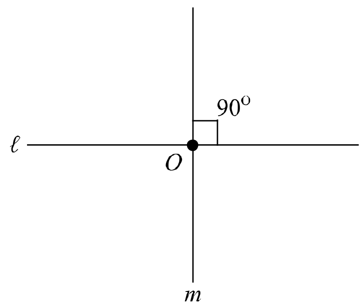
כל שתיים מארבע הזוויות שהן בעלות שוק משותפת, הן **זוויות צמודות**. כל שתי זוויות שרק הקדקוד משותף לשתיהן, הן **זוויות קדקודיות**. באיור 9, הזוויות הצמודות ל־ α הן β ו־ δ. הזווית הנותרת, γ, היא קדקודית ל־ α.

- סכום המידות של זוג זוויות **צמודות** הוא 180°.
- זוויות **קדקודיות** הן שוות מידה.

המידה של זווית אחת כלשהי מבין ארבע הזוויות הכלואות בין שני ישרים קובעת אפוא את המידה של השלוש הנותרות. באיור 9 – $\alpha = 45^\circ$; מכך אפשר להסיק ש־ $\gamma = 45^\circ$ (כי $\gamma = \alpha$), וכן ש־ $\beta = \delta = 135^\circ$ (כי $\alpha + \beta = \alpha + \delta = 180^\circ$).

אם $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, אז α נקראת **זווית חדה**. אם $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, אז α נקראת **זווית קהה**. זווית בת 90° היא **זווית ישרה**.

כאשר אחת מהזוויות הכלואות בין שני ישרים נחתכים היא ישרה, גם השלוש הנותרות הן ישרות. במקרה זה אומרים שהישרים **ניצבים** או **מאונכים** זה לזה, ומסמנים: $\ell \perp m$



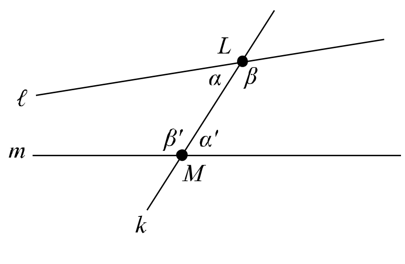
איור 10

יהיו ℓ ו־ m ישרים שונים, יהי k ישר **שלישי** שחותך אותם בנקודות השונות L ו־ M בהתאמה. באיור 11 סימנו את הזוויות הכלואות בין ℓ ל־ k, אשר הקטע LM מוכל בשוק שלהן, ב־ α, β, ואת הזוויות הכלואות בין m ל־ k, אשר הקטע LM מוכל בשוק שלהן, ב־ β', α'.

β צמודה ל־ α ו־ β' צמודה ל־ α', לפיכך: $\alpha = \alpha' \iff \beta = \beta'$

(הסימן '$\Leftrightarrow$' מציין "אם ורק אם")

השוק של α המונחת על ℓ והשוק של α' המונחת על m הן בצדדים שונים של k. הזוויות α ו־ α' הן **זוויות מתחלפות** (בין ℓ ו־ m לבין k). גם הזוויות β ו־ β' הן זוויות מתחלפות.

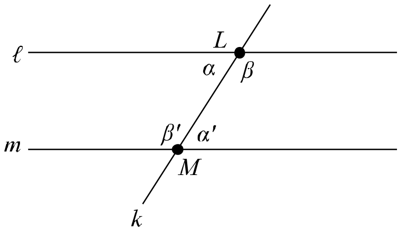


α ו־ α' (וכן β ו־ β') הן זוויות מתחלפות בין ℓ ו־ m לבין k

איור 11

- זוויות מתחלפות בין שני ישרים ℓ ו־ m לבין ישר שלישי k שחותך אותם בנקודות שונות הן שוות מידה אם ורק אם $\ell \parallel m$.

באיור 11 לעיל, ℓ ו־ m אינם מקבילים, ולכן $\alpha \neq \alpha',\ \beta \neq \beta'$. באיור 12 להלן, ℓ ו־ m מקבילים, ולכן $\alpha = \alpha',\ \beta = \beta'$



$\ell \| m$, $\alpha = \alpha',\ \beta = \beta'$

איור 12

כמקרה פרטי של הטענה הקודמת נקבל:

- אם $m \parallel \ell$ אז כל ישר שניצב ל־ ℓ ניצב גם ל־ m.
- אם $m \perp \ell$ אז ℓ ניצב לכל ישר שמקביל ל־ m.

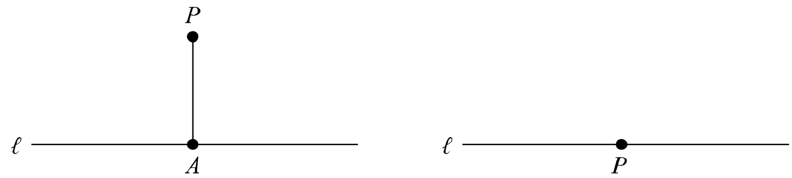
יהי ℓ ישר. דרך כל נקודה P במישור עובר ישר יחיד שניצב ל־ ℓ; ישר זה מכונה **האנך מ־ P ל־** ℓ.

הנקודה שבה האנך מ־ P ל־ ℓ חותך את ℓ מכונה **העָקֵב** של האנך מ־ P ל־ ℓ.

אם $P \in \ell$ אז העָקֵב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא הנקודה P עצמה;

אם $P \notin \ell$ אז העָקֵב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא נקודה אחרת מ־ P.

◁ כי העקב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא נקודה שנמצאת על הישר ℓ, ואילו $P \notin \ell$.



$P \notin \ell$; העקב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא $A \neq P$, $A \in \ell$ $P \in \ell$; העקב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא P

איור 13

6.1.3 מרחק מנקודה לנקודה

הגדרה

האורך של קטע AB הוא **המרחק** בין שני קצותיו.

המרחק מנקודה A לנקודה B יסומן: $d(A,B)$

(האות d היא ראש התיבה, כלומר האות הראשונה, במילה distance – מרחק).

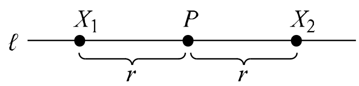
הערך המספרי של $d(A,B)$ תלוי ביחידת המידה (סנטימטרים, מטרים, אינצ'ים,...), אבל תהא אשר תהא אמת המידה, מתקיים תמיד:

- המרחק מנקודה לעצמה הוא 0, כלומר לכל נקודה A, $d(A,A) = 0$
- המרחק מנקודה אחת לנקודה אחרת הוא חיובי, כלומר לכל $A \neq B$, $d(A,B) > 0$

כמו כן,

- לכל A, B $d(A,B) = d(B,A)$
  (המרחק מ־ A ל־ B שווה למרחק מ־ B ל־ A.)

- יהי ℓ ישר, ותהי $P \in \ell$. לכל מספר $r > 0$, יש שתי נקודות על ℓ שמרחקן מ־ P הוא r, אחת על כל אחת משתי הקרניים הנגדיות של ℓ שיוצאות מ־ P.



X_1 ו־ X_2 הן על קרניים נגדיות של ℓ שיוצאות מ־ P, ומרחקן מ־ P הוא r

איור 14

יהי AB קטע. כל נקודה $X \in AB$ מחלקת את הקטע לשני קטעים, שסכום אורכיהם שווה לאורך של הקטע AB. הווי אומר:

- אם $X \in AB$, אז: $d(A,B) = d(A,X) + d(X,B)$

  אם $X \notin AB$ אז: $d(A,B) < d(A,X) + d(X,B)$

האי־שוויון האחרון מתקיים גם כאשר X אינה על הישר שעליו מונח הקטע AB, כלומר כאשר A, B, X אינן קוויות.

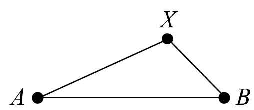
אם כן,

- **לכל נקודה** X במישור, $d(A,B) \leq d(A,X) + d(X,B)$
  ושוויון מתקיים אם ורק אם $X \in AB$.

האי־שוויון החלש האחרון ידוע בכינוי **אי־שוויון המשולש**.

כאשר A, B, X אינן קוויות המשמעות היא:

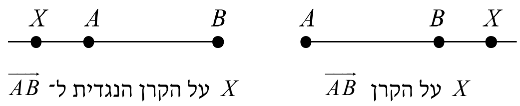
- סכום האורכים של שתי צלעות של משולש גדול מן האורך של הצלע השלישית.



$d(A,B) < d(A,X) + d(X,B)$

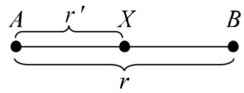
איור 15

שימו לב שאי־שוויון חזק מתקיים גם כאשר A, B, X הן קוויות, בתנאי היחיד ש־ $X \notin AB$.
שני החלקים של איור 16 ממחישים את האי־שוויון החזק עבור נקודה $X \notin AB$ שנמצאת על הקרן $\overrightarrow{AB}$ וכן עבור נקודה $X \notin AB$ שנמצאת על הקרן הנגדית ל־ $\overrightarrow{AB}$.



איור 16

- אם $d(A,B) = r$, אז לכל מספר r' שמקיים $0 \le r' \le r$ יש בקטע AB נקודה **יחידה** X שעבורה $d(A,X) = r'$. כמובן, $d(X,B) = (r - r')$.



איור 17

הגדרה

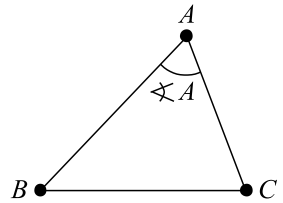
אמצע הקטע AB הוא הנקודה $X \in AB$ המחלקת את הקטע לשני קטעים שווי אורך.
המרחק ממנה לכל אחד מקצות הקטע הוא $\frac{1}{2}d(A,B)$.

קטעים שווי אורך מכונים **קטעים חופפים**; הסימן המקובל לציון חפיפה הוא $\cong$.
אם כן, מתקיים: $AB \cong A'B' \iff d(A,B) = d(A',B')$

6.1.4 משולשים

הגדרה

שלוש נקודות A, B, C שאינן קוויות יוצרות **משולש** שיסומן: $\triangle ABC$
שלוש הנקודות A, B, C הן **הקדקודים** של ה**משולש.**
הצלעות של $\triangle ABC$ הן הקטעים $AB,\ AC,\ BC$. את **זוויות המשולש** מסמנים בדרך כלל על פי קדקודיהן: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ הזווית הכלואה בין הצלעות AB, AC נקראת גם **הזווית שמול הצלע** BC .



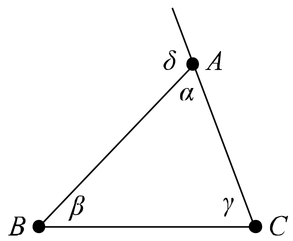
$\measuredangle A$ כלואה **בין** הצלעות AB ו־ AC. $\measuredangle A$ היא **מול** הצלע BC

איור 18

- לכל משולש, סכום המידות של שלוש הזוויות הוא $180°$;

זווית שצמודה לזווית של משולש מכונה **זווית חיצונית למשולש**.

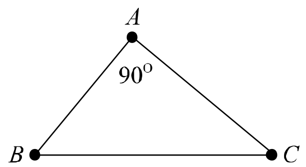
- המידה של זווית חיצונית למשולש שווה לסכום המידות של שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה.



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\alpha + \delta = 180°$, לכן $\delta = \beta + \gamma$

איור 19

במשולש יש לכל היותר זווית ישרה אחת (זווית אחת שמידתה $90°$). משולש שאחת מזוויותיו ישרה מכונה **משולש ישר זווית**. הצלעות הכולאות את הזווית הישרה הן **הניצבים**, והצלע שמול הזווית הישרה היא **הֶיְתֵר**. היתר ארוך מכל אחד מהניצבים.



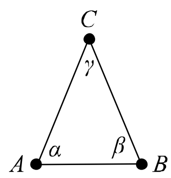
AB ו־ AC הם הניצבים, BC הוא היתר

איור 20

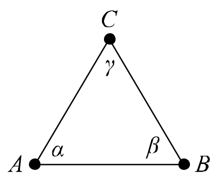
- שתי זוויות של משולש הן שוות מידה (לשון אחר – חופפות) אם ורק אם הצלעות שמולן שוות באורכן (חופפות).

משולש ששתיים מצלעותיו שוות באורכן מכונה **משולש שווה שוקיים**. הצלע השלישית של משולש שווה שוקיים היא **הבסיס** שלו. הזווית שמול הבסיס היא **זווית הראש** ושתי הזוויות האחרות הן **זוויות הבסיס**. אם הבסיס של משולש שווה שוקיים שווה באורכו לשתי הצלעות האחרות, אז כל שלוש הצלעות של המשולש הן שוות אורך, והמשולש הוא

שווה צלעות. לאור הקביעה המובלטת האחרונה, זוויות הבסיס של משולש שווה שוקיים הן שוות מידה, וכל הזוויות של משולש שווה צלעות הן שוות מידה. מאחר שסכום הזוויות של כל משולש הוא $180°$, הרי שכל זווית של משולש שווה צלעות היא בת $60°$.



משולש שווה שוקיים שאינו שווה צלעות, $\alpha = \beta$, $\beta \neq \gamma$



משולש שווה צלעות $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

איור 21

שני משולשים נקראים **חופפים** אם אפשר להתאים את הקדקודים של האחד לקדקודים של האחר באופן שהזוויות שקדקודיהן מותאמים תהיינה חופפות, והצלעות שמולן תהיינה חופפות.

שני המשולשים באיור 22 חופפים.

איור 22

ההתאמה של קדקודי ΔABC לקדקודי ΔDEF המעידה על החפיפה היא:

$A \leftrightarrow E \quad B \leftrightarrow F \quad C \leftrightarrow D$

את חפיפתם של המשולשים נציין אפוא כך: $\Delta ABC \cong \Delta EFD$

כל קדקוד בסימון ΔEFD רשום במקום המקביל לזה שבו מופיע הקדקוד המתאים לו בסימון ΔABC.

הסימון $\Delta ABC \cong \Delta EFD$

מציין אפוא שמתקיימים כל ששת התנאים האלה:

$\measuredangle C \cong \measuredangle D \qquad \measuredangle B \cong \measuredangle F \qquad \measuredangle A \cong \measuredangle E$

$AB \cong EF \qquad AC \cong ED \qquad BC \cong FD$

משפטי החפיפה של משולשים הם משפטים הקובעים תנאים לקיום חפיפה מלאה בין שני משולשים.

משפט 1 – משפטי החפיפה השימושיים והמוכרים ביותר (נכנה אותם בכינויים המקוצרים הנהוגים עבורם):

- **צ.ז.צ** (צלע־זווית־צלע):
  שני משולשים שחופפים בשתי צלעות ובזווית הכלואה ביניהם חופפים ביניהם.
- **ז.צ.ז** (זווית־צלע־זווית)
  שני משולשים שחופפים בשתי זוויות ובצלע שמחברת את קדקודיהן חופפים ביניהם.
- **צ.צ.צ** (צלע־צלע־צלע)
  שני משולשים שחופפים בשלוש צלעות חופפים ביניהם.
- **שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה:**
  שני משולשים שחופפים בשתי צלעות, ובזווית שמול הארוכה מביניהן חופפים ביניהם.

במשולש ישר זווית היתר ארוך מכל ניצב. משפט החפיפה הבא הוא אפוא מקרה פרטי של המשפט האחרון.

- **ניצב־יתר**
  שני משולשים ישרי זווית שחופפים בְּניצב ובַיֶּתֶר חופפים ביניהם.

6.1.5 מרחק מנקודה לישר

הגדרה

מרחק מנקודה P **לישר** ℓ הוא המרחק מ־ P לעָקֵב של האנך מ־ P ל־ ℓ. הוא יסומן:

$$d(P,\ell)$$

אם $P \in \ell$, אז העָקֵב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא הנקודה P עצמה; $d(P,P)=0$. לפיכך,

- אם $P \in \ell$, אז: $$d(P,\ell)=0$$

אם $P \notin \ell$ אז העָקֵב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא נקודה אחרת מ־ P. לפיכך,

- אם $P \notin \ell$ אז: $$d(P,\ell)>0$$

בכל מקרה, בין אם $P \in \ell$ בין אם לאו,

- המרחק מ־ P ל־ ℓ הוא האורך של **הקצר מבין הקטעים המחברים את** P **לנקודות על** ℓ.

ננמק:

אם $P \in \ell$, אז העקב של האנך מ־ P ל־ ℓ הוא P.

לכן, לפי הגדרת המרחק מנקודה לישר מתקיים: $$d(P,\ell)=d(P,P)$$

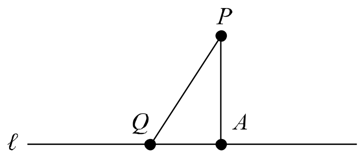
הקטע (המנוון) PP, המחבר את P לעצמה, הוא הקצר מבין הקטעים המחברים את P לנקודות על ℓ, משום שאורכו 0, בעוד שהאורך של כל קטע המחבר את P לנקודה שונה מ־ P הוא חיובי.

אם $P \notin \ell$, נסמן ב־ A את העקב של האנך מ־ P ל־ ℓ. בבירור, $A \neq P$, כי $A \in \ell$.

לפי הגדרת המרחק מנקודה לישר, המרחק מ־ P ל־ ℓ הוא: $d(P,\ell) = d(P,A)$

עלינו להראות שאם $Q \in \ell$ ו־ $Q \neq A$ אז: $d(P,Q) > d(P,A)$

אכן, P,A,Q הן קדקודים של משולש ישר זווית, אשר הקטע PA הוא אחד מניצביו, והקטע PQ הוא היתר שלו. האי־שוויון המבוקש נובע מכך שבמשולש ישר זווית היתר ארוך מכל ניצב.

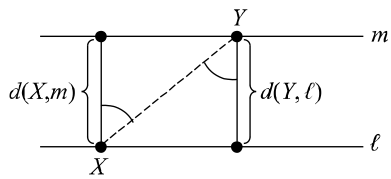


איור 23

□

מהגדרת המרחק מנקודה לישר, ומכך שזוויות מתחלפות בין מקבילים הן שוות, נובע לפי משפט החפיפה **ז.צ.ז**, שאם $X \in \ell$ $m \parallel \ell$ ו־ $Y \in m$, אז $d(X,m) = d(Y,\ell)$.

הערך המשותף של מרחקים אלה מכונה **המרחק בין הישרים המקבילים** ℓ, m. איור 24 ממחיש זאת.



$X \in \ell$, $Y \in m$, $m \parallel \ell$. המרחק בין המקבילים הוא $d(X,m)$ והוא גם $d(Y,\ell)$

איור 24

6.1.6 האנך האמצעי

הגדרה

האנך האמצעי של קטע AB ($A \neq B$) הוא הישר הניצב לקטע העובר דרך אמצע הקטע.

◁ כשאומרים שישר ℓ ניצב **לקטע** (לא מנוון) AB, הכוונה היא ש־ ℓ ניצב לישר שעליו מונח הקטע AB. כיוצא בזה, כשאומרים שישר m מקביל **לקטע** (לא מנוון) AB, הכוונה היא ש־ m מקביל לישר שעליו מונח הקטע AB.

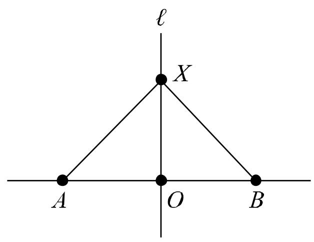
- נקודה X נמצאת על האנך האמצעי של קטע AB $(A \neq B)$ אם ורק אם מרחקיה מקצות הקטע שווים זה לזה, כלומר אם ורק אם מתקיים: $d(X,A) = d(X,B)$

ננמק:

נראה תחילה שאם X היא על האנך האמצעי של AB אז מרחקה מ־A שווה למרחקה מ־B.

נסמן ב־O את אמצע הקטע AB, וב־ℓ את האנך האמצעי של AB. ℓ ניצב ל־AB ועובר דרך O.

תהי $X \in \ell$ נקודה כלשהי על ℓ. אם $X = O$ אז מרחקיה מ־A ומ־B שווים (כי O היא אמצע הקטע). אם $X \neq O$, נסתכל במשולשים $\triangle AOX$ ו־$\triangle BOX$ (ראו באיור 25). OX הוא צלע משותפת, $AO \cong OB$ והזוויות שקדקודן O הן ישרות.



איור 25

לכן, לפי **צ.ז.צ**,	$\triangle AOX \cong \triangle BOX$
לפיכך,	$XA \cong XB$
כלומר:	$d(X,A) = d(X,B)$

כעת נראה שאם מרחקה של X מ־A שווה למרחקה מ־B, אז X היא על האנך האמצעי של AB.

אם $X = O$, כלומר אם X היא אמצע הקטע AB, אז בבירור X היא על האנך האמצעי של AB. אם $X \neq O$, אז X אינה על הישר שעליו נמצאות A,O,B. במקרה זה, נחבר את X ל־O, ונבחן, כמקודם, את המשולשים $\triangle AOX$ ו־$\triangle BOX$ (ראו באיור 25 לעיל). OX היא צלע משותפת, $OA \cong OB$ ו־$XA \cong XB$. לכן, לפי **צ.צ.צ** מתקיים:

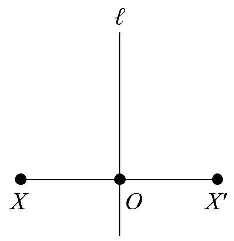
$$\triangle AOX \cong \triangle BOX$$

לפיכך שתי הזוויות הצמודות שקדקודן ב־O הן שוות מידה, ומאחר שסכום מידותיהן $180°$, הרי שכל אחת מהן היא בת $90°$, כלומר אלה זוויות ישרות. אם כן, הישר העובר דרך X ו־O ניצב ל־AB ועובר דרך אמצע הקטע. ישר זה הוא אפוא האנך האמצעי של הקטע. X נמצאת עליו, לכן X היא על האנך האמצעי של AB. $\square$

6.1.7 סימטריה ביחס לישר

הגדרה

יהי ℓ ישר. שתי נקודות שונות, שאינן על ℓ, הן **סימטריות ביחס ל־** ℓ, אם ℓ הוא האנך האמצעי של הקטע המחבר אותן.



ℓ הוא האנך האמצעי של הקטע XX', X ו־ X' **סימטריות** ביחס ל־ ℓ

איור 26

לכל נקודה $X \notin \ell$, יש נקודה **יחידה** X', כך ש־ X, X' סימטריות ביחס ל־ ℓ. הנקודה הזאת מכונה **הנקודה הסימטרית ל־** X **ביחס ל־** ℓ.

כדי שהמושג "הנקודה הסימטרית ל־ X ביחס ל־ ℓ" יהיה מוגדר **לכל** נקודה X במישור, כולל הנקודות שעל ℓ, נגדיר:

הגדרה

לכל $X \in \ell$, הנקודה הסימטרית ל־ X ביחס ל־ ℓ היא X עצמה.

- אם X' סימטרית ל־ X ביחס ל־ ℓ, אז X סימטרית ל־ X' ביחס ל־ ℓ.

6.1.8 חוצה הזווית

באיור 27, ℓ_1 ו־ ℓ_2 הם ישרים שונים שנחתכים בנקודה O. הישר m מחלק את הזווית α לשתי זוויות שוות מידה; מידת כל אחת מהן היא מחצית מידת α. m **חוצה אפוא את הזווית** α.

איור 27

- נקודה X נמצאת על חוצה הזווית שבין שני ישרים נחתכים אם ורק אם מרחקיה משני הישרים הללו שווים.

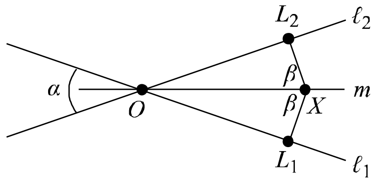
ננמק:

תחילה נראה שאם m חוצה את הזווית α בין הישרים הנחתכים ℓ_1 ו־ ℓ_2 ו־ $X \in m$, אז:

$$d(X,\ell_1) = d(X,\ell_2)$$

תהי $X \neq O$ נקודה כלשהי על m. נוריד אנכים מ־ X ל־ ℓ_1 ול־ ℓ_2 , ונסמן את עקביהם L_1 ו־ L_2 (בהתאמה).

◁ לגבי הנקודה O , הנמצאת הן על ℓ_1 והן על ℓ_2 , הטענה מובנת מאליה: $d(O,\ell_1) = d(O,\ell_2) = 0$



איור 28

OX היא צלע משותפת למשולשים $\triangle L_1OX, \triangle L_2OX$, ושתי הזוויות שסומנו ב־ β הן שוות מידה (כל אחת מהן היא הזווית השלישית של משולש שמידות שתי זוויותיו האחרות הן $\frac{1}{2}\alpha$ ו־ $90°$);

לכן לפי משפט החפיפה **ז.צ.ז**, מתקיים $\quad \triangle L_1OX \cong \triangle L_2OX$

ומכאן ש־ $\quad XL_1 \cong XL_2$

לכן $\quad d(X,L_1) = d(X,L_2)$

ולפי הגדרת המרחק מנקודה לישר, פירוש הדבר הוא: $\quad d(X,\ell_1) = d(X,\ell_2)$

כעת נראה שאם X נקודה שעבורה $d(X,\ell_1) = d(X,\ell_2)$ אז X היא על m.

תהי $X \neq O$ נקודה כלשהי שמרחקה מ־ ℓ_1 שווה למרחקה מ־ ℓ_2. נסמן ב־ L_1 וב־ L_2 את עקבי האנכים מ־ X ל־ ℓ_1 ול־ ℓ_2 (בהתאמה). לפי ההנחה (היעזרו באיור 28):

◁ לגבי הנקודה O , שמרחקה מכל אחד מבין ℓ_1 ו־ ℓ_2 הוא 0 , הטענה מובנת מאליה; m , חוצה הזווית α , עובר כמובן דרך O , שהיא הקדקוד של הזווית.

$$d(X,L_1) = d(X,L_2)$$

לכן, לפי משפט החפיפה **ניצב־יתר**, $\quad \triangle L_1OX \cong \triangle L_2OX$

לכן: $\quad \sphericalangle L_1OX = \sphericalangle L_2OX$

לפיכך X היא על m (חוצה הזווית α). □

6.1.9 המעגל

תהי O נקודה ויהי $r > 0$.

המעגל ברדיוס r סביב O הוא קבוצת הנקודות במישור, שמרחקן מ־ O הוא r .

המעגל ברדיוס r סביב O יסומן: $\quad \mathcal{C}(O,r)$

($\mathcal{C}$ היא ראש התיבה במילה Circle – מעגל). הנקודה O היא **מרכז המעגל**.

אם כן, $\quad \mathcal{C}(O,r) = \{X \in \mathcal{P}: d(X,O) = r\}$

אם $X \in \mathcal{C}(O,r)$ נאמר שהנקודה X **נמצאת על המעגל** ברדיוס r סביב O, או שמעגל זה **עובר דרך** X.

הגדרה

קטע שמחבר את O עם נקודה כלשהי על המעגל $\mathcal{C}(O,r)$ הוא **רדיוס** של המעגל.

קטע המחבר שתי נקודות P,Q שנמצאות על המעגל נקרא **מיתר**.

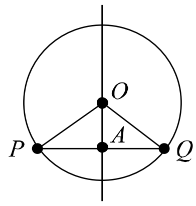
מיתר שעובר דרך מרכז המעגל נקרא **קוטר**.

ישר ℓ שחותך מעגל $\mathcal{C}(O,r)$ בנקודה אחת בלבד נקרא **מַשִּׁיק** למעגל.

- מרכז המעגל O נמצא על האנך האמצעי של כל מיתר שלו.

ננמק:

נסמן ב־ A את אמצע המיתר PQ (ראו באיור 29). המשולשים $\triangle OAP$ ו־ $\triangle OAQ$ חופפים לפי **צ.צ.צ**, לכן הזוויות הצמודות שקדקודן המשותף הוא A, הן שוות מידה, ומכאן שהן ישרות. לפיכך $PQ \perp OA$. מאחר ש־ OA עובר דרך אמצע המיתר PQ, הרי שהוא האנך האמצעי למיתר זה. O, שנמצאת עליו, היא אפוא על האנך האמצעי של המיתר PQ.



איור 29 □

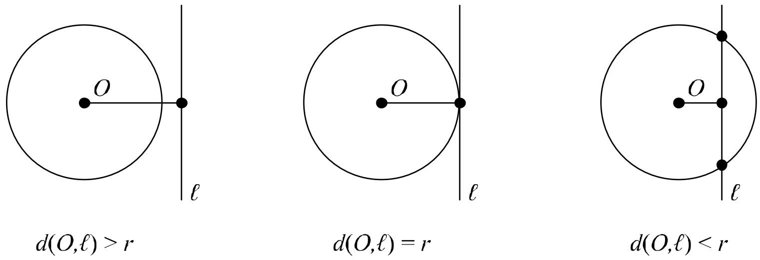
כאמור, מיתר שעובר דרך מרכז המעגל הוא **קוטר**. אורך הקוטר של המעגל $\mathcal{C}(O,r)$ הוא $2r$. האורך של כל מיתר שאינו קוטר קטן מ־ $2r$. ישר ℓ שחותך מעגל $\mathcal{C}(O,r)$ בנקודה אחת בלבד הוא כאמור **מַשִּׁיק** למעגל. המשיק למעגל ניצב לרדיוס העובר דרך נקודת ההשקה (נסו לנמק זאת בעצמכם).

- מספר נקודות החיתוך של ישר ℓ ומעגל $\mathcal{C}(O,r)$ תלוי במרחקו של הישר ממרכז המעגל:

  אם $d(O,\ell) < r$, אז ℓ חותך את $\mathcal{C}(O,r)$ בשתי נקודות;

  אם $d(O,\ell) = r$, אז ℓ חותך את $\mathcal{C}(O,r)$ בנקודה אחת (ℓ מַשִּׁיק למעגל);

  אם $d(O,\ell) > r$, אז הישר והמעגל אינם נפגשים.



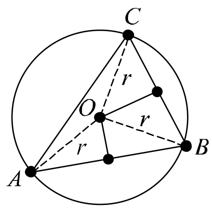
איור 30

- לכל שלוש נקודות לא קוויות יש מעגל שעובר דרכן.

◁ בסעיף הבא נראה שאפשר לחזק טענה זו: לכל שלוש נקודות לא קוויות יש מעגל **יחיד** שעובר דרכן.

ננמק:

תהיינה A,B,C נקודות לא קוויות. הישרים העוברים דרך A,B ודרך B,C נחתכים (בנקודה B), לכן גם האנכים האמצעיים של הקטעים AB ו־ BC נחתכים. נסמן ב־ O את נקודת החיתוך שלהם.



איור 31

O היא על האנך האמצעי של AB, לכן מרחקיה מקצות הקטע שווים.

◁ ראו בסעיף 6.1.6.

$$d(O,A) = d(O,B)$$

O היא גם על האנך האמצעי של BC, לכן

$$d(O,B) = d(O,C)$$

ובסך הכל:

$$d(O,A) = d(O,B) = d(O,C)$$

נסמן את האורך המשותף של שלושת הקטעים הללו ב־ r. בבירור, $r > 0$, ושלוש הנקודות A,B,C נמצאות על המעגל ברדיוס r סביב O. □

שימו לב, מן השוויון

$$d(O,A) = d(O,C)$$

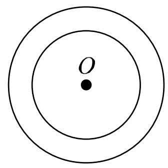
שהתקבל במהלך ההוכחה הקודמת, נובע ש־ O – שהיא נקודת החיתוך של האנכים האמצעיים של OA ו־ OB – נמצאת גם על האנך האמצעי של OC. מכאן אנו למדים:

- בכל משולש, האנכים האמצעיים של שלוש הצלעות נחתכים בנקודה אחת. נקודה זו היא המרכז של מעגל שעובר דרך שלושת קדקודי המשולש.

6.1.10 נקודות חיתוך של מעגלים

הגדרה

מעגלים קונצנטריים הם מעגלים שיש להם מרכז משותף.

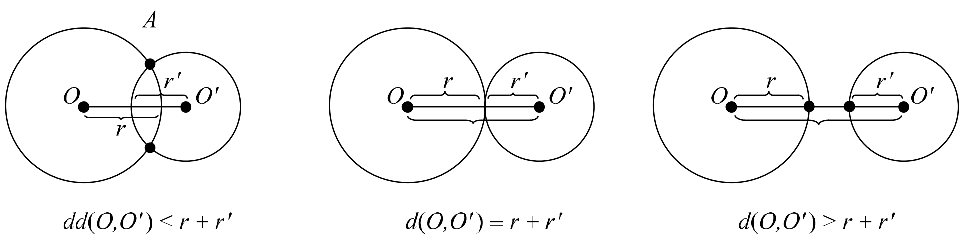


איור 32

לשני מעגלים קונצנטריים **שרדיוסיהם שונים**, אין נקודות משותפות (לשון אחר – אם לשני מעגלים קונצנטריים יש נקודה משותפת אחת כלשהי אז הם מתלכדים).

נבחן את מספר נקודות החיתוך של שני מעגלים **שמרכזיהם בנקודות שונות**.

איור 33 ממחיש זוגות של מעגלים שמרכזיהם שונים, שמספר נקודות החיתוך שלהם הוא 0, 1 או 2.



איור 33

בחלק הימני של האיור, המרחק בין המרכזים גדול מסכום אורכי הרדיוסים של שני המעגלים. במקרה זה המעגלים אינם נחתכים. בחלקים האחרים של האיור מתקיים

$$d(O,O') \le r + r'$$

והמעגלים נחתכים (בנקודה אחת או בשתי נקודות, A ו־B).

- אם $A \neq B$ הן נקודות חיתוך של שני מעגלים $\mathcal{C}(O,r)$ ו־ $\mathcal{C}(O',r')$ שמרכזיהם שונים $(O \neq O')$, אז A,B סימטריות ביחס לישר העובר דרך O ו־ O'.

ננמק:

נניח ש־ A,B ($A \neq B$) הן נקודות חיתוך של המעגלים $\mathcal{C}(O,r)$ ו־ $\mathcal{C}(O',r')$ $(O \neq O')$.

נראה שהישר העובר דרך O ו־ O' הוא האנך האמצעי של הקטע AB (ולכן, לפי ההגדרה של נקודות סימטריות ביחס לישר, A,B סימטריות ביחס לישר העובר דרך O ו־ O').

◁ ראו בסעיף 6.1.7.

לשם כך מספיק להראות ש־ O ו־ O' נמצאות על האנך האמצעי של AB (שכן, מכך נובע שהישר היחיד העובר דרכן הוא האנך האמצעי של הקטע הנידון).

A ו־ B הן על $\mathcal{C}(O,r)$, לכן $d(A,O) = d(B,O) = r$

ולכן O היא על האנך האמצעי של הקטע AB.

◁ ראו בסעיף 6.1.7.

A ו־ B הן גם על $\mathcal{C}(O',r')$, לכן $d(A,O') = d(B,O') = r'$

ולכן גם O' היא על האנך האמצעי של הקטע AB. □

כמסקנה מיידית מהטענה הקודמת אנו מקבלים:

- שני מעגלים שמרכזיהם בנקודות שונות נחתכים בשתי נקודות **לכל היותר**.

ננמק:

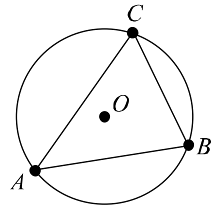
תהיינה A,B,C נקודות חיתוך של שני מעגלים $\mathcal{C}(O,r)$ ו־ $\mathcal{C}(O',r')$ (כאשר $O \neq O'$). אם $A \neq B$, אז לפי הטענה הקודמת, B היא הנקודה הסימטרית ל־ A ביחס לישר העובר דרך O ו־ O'. אם גם $A \neq C$, אז גם C היא הנקודה הסימטרית ל־ A ביחס לישר העובר דרך O ו־ O'. לכן $C = B$. □

מן הטענה שהוכחנו זה עתה נובע שדרך שלוש נקודות לא קוויות A,B,C עובר **לכל היותר מעגל אחד**, שכן אילו היו שני מעגלים בעלי מרכזים שונים שעוברים דרכן, A,B,C היו להם שלוש נקודות חיתוך, בעוד כפי שראינו, שני מעגלים בעלי מרכזים שונים נחתכים בשתי נקודות לכל היותר.

כבר הוכחנו שדרך כל שלוש נקודות לא קוויות עובר לפחות מעגל אחד. מהטענה האחרונה אפשר אפוא להסיק:

- דרך שלוש נקודות לא קוויות עובר מעגל **אחד ויחיד**.

המעגל (היחיד) העובר דרך שלוש נקודות לא קוויות A,B,C מכונה **המעגל החוסם** את המשולש $\triangle ABC$.

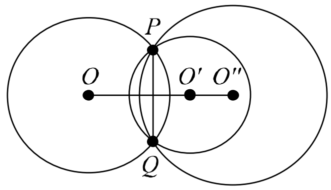


המעגל החוסם את $\triangle ABC$

איור 34

בהמשך נתייחס גם למספר הנקודות המשותפות **לשלושה** מעגלים שמרכזיהם בנקודות שונות.

לכל שניים משלושת המעגלים יש לכל היותר שתי נקודות משותפות. ברור אפוא שמספר הנקודות המשותפות לכל שלושת המעגלים אינו עולה על 2. איור 35 ממחיש שלושה מעגלים בעלי שתי נקודות משותפות.



איור 35

מרכזי המעגלים באיור 35 הם נקודות קוויות, ולא במקרה:

- אם שלושה מעגלים שמרכזיהם בנקודות השונות O, O' ו־ O'' נפגשים בשתי נקודות **שונות** P,Q, אז O, O' ו־ O'' הן נקודות **קוויות**.

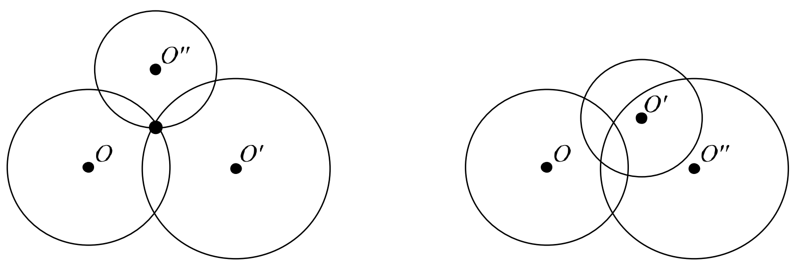
ננמק:

מכך ש־ P,Q נמצאות על המעגל שמרכזו בנקודה O נובע ש־ O היא על האנך האמצעי של הקטע PQ (שהוא מיתר של המעגל). מכך ש־ P,Q נמצאות גם על המעגלים שמרכזיהם O' ו־ O'' נובע שגם O' ו־ O'' הן על האנך האמצעי של הקטע PQ.
אם כן, שלוש הנקודות O, O' ו־ O'' הן על ישר משותף (האנך האמצעי של PQ), ולכן הן קוויות. □

מן הטענה שהוכחנו זה עתה נובע מיידית:

- לשלושה מעגלים שמרכזיהם אינם נקודות קוויות יש **לכל היותר** נקודה משותפת אחת.

בכל אחד משני חלקי איור 36 מומחשים שלושה מעגלים שמרכזיהם אינם נקודות קוויות.
בצד ימין מספר נקודות החיתוך של שלושת המעגלים הוא 0, ובצד שמאל – 1.



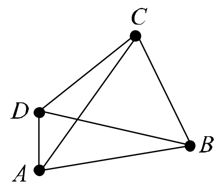
איור 36

6.1.11 המרובע

הגדרה

מרובע הוא צורה במישור בעלת ארבע צלעות.

ארבעה קטעים, שאין בהם שניים על ישר אחד, שכל אחד מהם פוגש שניים משלושת הנותרים ואינו פוגש את השלישי, הם **צלעות** של **מרובע**. צלעות שנפגשות הן **צלעות סמוכות**, צלעות שאינן נפגשות הן **צלעות נגדיות**. ארבע נקודות המפגש של צלעות המרובע הם **הקדקודים** של המרובע. קדקודים שהקטע המחבר אותם הוא צלע של המרובע, הם **קדקודים סמוכים**. קדקודים שהקטע המחבר אותם אינו צלע של המרובע, הם **קדקודים נגדיים**. קטע המחבר קדקודים נגדיים של מרובע, הוא **אלכסון** של המרובע. מבין ששת הקטעים המחברים שניים מארבעת הקדקודים של מרובע, ארבעה הם צלעות והשניים הנותרים הם אלכסונים.



AB,BC,CD,DA הן צלעות של המרובע $ABCD$, AC ו־ BD הם האלכסונים

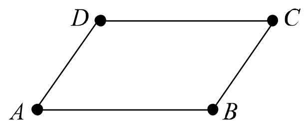
איור 37

המרובעים הרלוונטיים לענייננו בפרק זה הם המקביליות.

הגדרה

מקבילית היא מרובע ששני זוגות הצלעות הנגדיות שלה הם זוגות קטעים מקבילים ושווי אורך (חופפים).

המרובע מאיור 38 הוא מקבילית, כי צלעותיו הנגדיות AB ו־ CD מקבילות וחופפות, וגם צלעותיו הנגדיות AC ו־ BD מקבילות וחופפות.



איור 38

קל להוכיח (באמצעות העברת אלכסון, שימוש בשוויון זוויות מתחלפות בין מקבילים ובמשפטי חפיפה) את הטענות האלה:

- אם במרובע יש זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות ושוות אורך, אז המרובע הוא מקבילית.
- אם במרובע יש שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות, אז המרובע הוא מקבילית.
- אם במרובע יש שני זוגות של צלעות נגדיות שוות אורך, אז המרובע הוא מקבילית.

המשפטים האלה, המתארים תנאים מספיקים לכך שמרובע יהיה מקבילית, יועילו לנו בהמשך.
להשלמת התמונה נציג הגדרות למלבן ולריבוע.

הגדרות

אם במקבילית יש שתי צלעות סמוכות שניצבות זו לזו, אז כל צלע ניצבת לשתי הצלעות הסמוכות לה, ובמקרה זה המקבילית מכונה **מלבן**.

אם במלבן יש שתי צלעות סמוכות שוות אורך, אז כל הצלעות הן שוות אורך, והמלבן מכונה **ריבוע**.

נסיים את המבוא הגיאומטרי בהוכחת טענה שתועיל מאוד בהמשך היחידה.

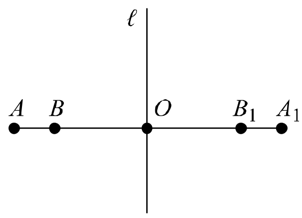
- יהי ℓ ישר. תהיינה A,B נקודות שונות שאינן על ℓ, הנמצאות מאותו צד של ℓ, ותהיינה A_1,B_1 הנקודות הסימטריות להן (בהתאמה) ביחס ל־ ℓ.

אז
$$d(A,B) = d(A_1,B_1)$$
$$d(A,B_1) = d(A_1,B)$$

הוכחה

נבחין בין שתי אפשרויות לגבי המיקום ההדדי של A,B.

א. הישר העובר דרך A,B ניצב ל־ ℓ. נסמן ב־ O את נקודת החיתוך שלו עם ℓ (איור 39).



איור 39

בגלל הסימטריה של A,A_1 $\quad d(A,O) = d(A_1,O)$

בגלל הסימטריה של B,B_1 $\quad d(B,O) = d(B_1,O)$

באיור 39, B היא בין A ל־ O ו־ B_1 היא בין A_1 ל־ O. לכן:
$$d(A,O) = d(A,B) + d(B,O)$$
$$d(A_1,O) = d(A_1,B_1) + d(B_1,O)$$

◁ באיור 39, A היא הנקודה שמרחקה מ־ ℓ גדול יותר. בהנחה שהנקודה שקראנו לה A היא המרוחקת יותר מ־ ℓ אין משום הגבלת הכלליות. אם סימנתם ב־ B את הנקודה המרוחקת יותר מ־ ℓ, יש להמיר בהוכחה כל A ב־ B וכל B ב־ A, וכיוצא בזה לגבי A_1,B_1.

לאור שני השוויונות הקודמים, שני השוויונות האחרונים מבטיחים:

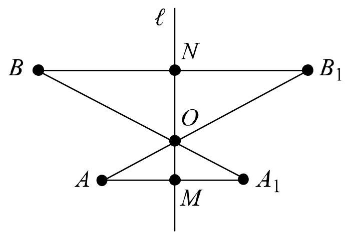
$$d(A,B) = d(A_1,B_1)$$

באופן דומה, מאחר ש־ B היא בין A ל־ B_1 ו־ B_1 היא בין A_1 ל־ B, אז

$$d(A,B_1) = d(A,B) + d(B,B_1)$$
$$d(A_1,B) = d(A_1,B_1) + d(B_1,B)$$

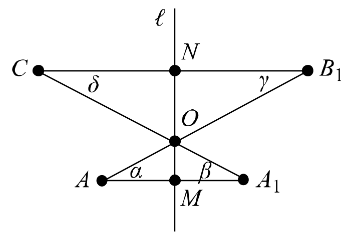
ומאחר שכל אחד משני המחוברים באגף ימין של שני השוויונות, שווה למחובר המתאים לו בשוויון האחר, אז $d(A,B_1) = d(A_1,B)$
כפי שנטען.

ב. הישר העובר דרך A,B אינו ניצב ל־ ℓ.



איור 40

באיור 40, M היא אמצע הקטע AA_1; N היא אמצע הקטע BB_1; O היא נקודת החיתוך של ℓ עם הישר העובר דרך A ו־ B_1. באיור 41 הוספנו את הישר העובר דרך A_1 ו־ O. נקודת החיתוך שלו עם הישר העובר דרך B ו־ B_1 סומנה ב־ C. הזוויות שלהן נזדקק סומנו באותיות יווניות.



איור 41

◁ איננו רשאים להניח ללא הוכחה שהישר העובר דרך A_1 ו־ O עובר גם דרך B. לפיכך סימנו את נקודת החיתוך של הישר הזה עם BB_1 ב־ C, ואנו **מוכיחים** שבהכרח $C = B$.

משימתנו הראשונה תהיה להראות ש־ $C = B$

O היא על ℓ, שהוא האנך האמצעי של הקטע AA_1, לכן מתקיים: $OA \cong OA_1$

המשולש $\triangle AOA_1$ הוא אפוא שווה שוקיים. α,β הן זוויות הבסיס שלו,

לכן: $\alpha = \beta$

הזוויות α,γ והזוויות β,δ הן זוויות מתחלפות בין מקבילים. לכן:

$$\alpha = \gamma$$

$$\beta = \delta$$

משלושת השוויונות האחרונים נובע: $\gamma = \delta$

לכן $\triangle COB_1$ הוא שווה שוקיים, ולכן O היא על האנך האמצעי של הקטע CB_1. האנך ל- CB_1 העובר דרך O הוא ℓ, ולכן ℓ הוא האנך האמצעי של הקטע CB_1. הווי אומר: C היא הנקודה הסימטרית ל- B_1 ביחס ל- ℓ; לכן $C = B$

אם כן, הנקודות A_1,O,B הן קוויות ולפיכך: $d(A_1,B) = d(A_1,O) + d(O,B)$

על הנקודות A,O,B_1 ידענו מלכתחילה שהן קוויות, לכן:

$$d(A,B_1) = d(A,O) + d(O,B_1)$$

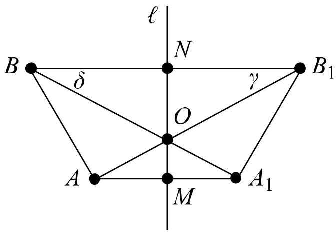
ומאחר ש-

$$d(A_1,O) = d(A,O)$$
$$d(O,B) = d(O,B_1)$$

הרי ש-

$$d(A,B_1) = d(A_1,B)$$

הוכחנו אחד משני השוויונות המבוקשים. נותר להראות ש- $d(A,B) = d(A_1,B_1)$. לשם כך, התבוננו במשולשים $\triangle ABB_1$ ו- $\triangle A_1B_1B$ (איור 42):



איור 42

הצלע BB_1 משותפת לשניהם. כבר הוכחנו שגם הצלעות המתאימות AB_1 ו- A_1B הן שוות אורך. הזוויות הכלואות בין הצלעות המתאימות הן γ,δ, וכבר ראינו שהן שוות מידה. לכן, לפי משפט החפיפה **צ.ז.צ** מתקיים: $\triangle ABB_1 \cong \triangle A_1B_1B$

לכן $AB \cong A_1B_1$, ומכאן ש- $d(A,B) = d(A_1,B_1)$

וההוכחה הושלמה. □

6.2 העתקות של המישור

פונקציה מהמישור $\mathcal{P}$ לעצמו מכונה **העתקה של המישור**.

לסימול העתקות של המישור נשתמש באותיות לטיניות גדולות וזקופות –

$$\mathrm{F,G,H,S,T,R}, \ldots$$

העתקה $\mathrm{F}:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ מתאימה לכל נקודה X במישור תמונה יחידה $\mathrm{F}(X)$, שאף היא נקודה במישור. אם $\mathrm{F}(X) = X'$ אז אומרים ש- F **מעתיקה** את X ל- X', או ש- X **עוברת** ל- X' באמצעות F. כיוצא בזה, אם $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}$ היא קבוצת נקודות במישור, ו- $\mathrm{F}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}'$